Trigonometrisko funkciju grafiku pārveidojumi

PIKC „DDMV „Saules skola""
Vispārējās izglītības programma
Mācību priekšmets: **Matemātika I, 2. kurss**
Autors: **Nataļja Soikāne**
2021./2022.m.g.

Anotācija

Nataļja Soikāne

TRIGONOMETRISKO FUNKCIJU GRAFIKU PĀRVEIDOJUMI

Metodiskā izstrādne dod iespēju matemātikas stundās iepazīties ar trigonometrisko funkciju grafiku pārveidojumiem. Prezentācijā apkopoti teorētiskie pamati, aplūkots, ka konstruēt, tai skaitā ar digitāliem rīkiem, funkciju $\mathbf{y}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{sin}(\boldsymbol{bx}+\boldsymbol{c})+\boldsymbol{d}$ un $\mathbf{y}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{cos}(\boldsymbol{bx}+\boldsymbol{c})+\boldsymbol{d}$ grafikus, kā koeficienti $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ ietekmē funkcijas grafiku, kas mainās pašā funkcijas grafikā, gan funkcijas īpašībās Darbs satur uzdevumu atrisināšanas piemērus, kā arī uzdevumus patstāvīgajam darbam.

Mērķauditorija: izglītojamie

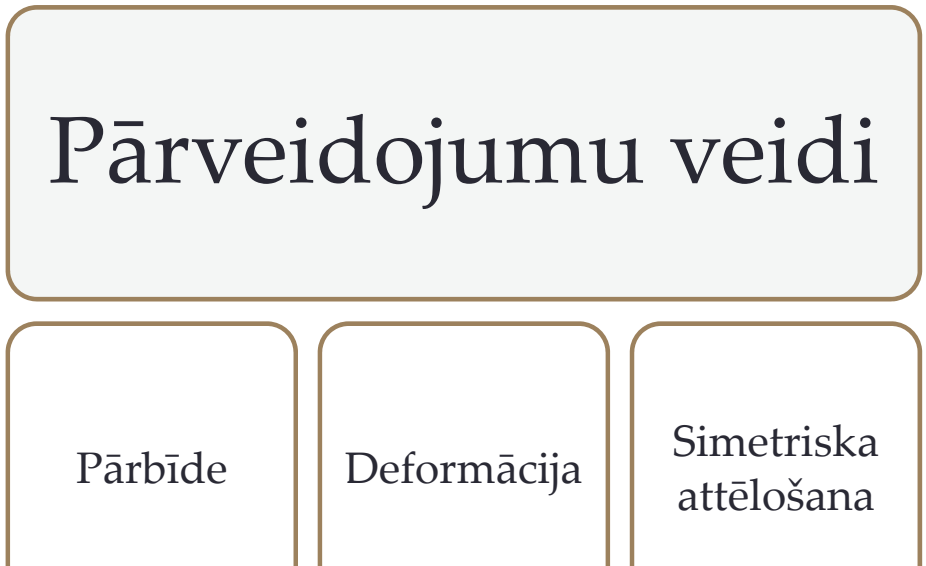
Saturs

1. Teorija
   1) Funkciju grafiku pārveidojumu veidi
   2) Kā konstruēt funkcijas grafiku $y = f(x) + d$
   3) Kā konstruēt funkcijas grafiku $y = f(x + c)$
   4) Kā konstruēt funkcijas grafiku $y = af(x)$
   5) Kā konstruēt funkcijas grafiku $y = f(bx)$
2. Uzdevumi
   1) Uzdevumu atrisināšanas piemēri
   2) Uzdevumi patstāvīgajam darbam
3. Literatūras saraksts

TEORIJA

Trigonometrisko funkciju grafiku pārveidojumi

Funkciju $\boldsymbol{y = a \cdot sin(bx + c) + d}$ un $\boldsymbol{y = a \cdot cos(bx + c) + d}$ grafiks ir **sinusoīda**, kuru iegūst, pārveidojot pamatfunkcijas grafiku.



Grafiku pārbīde

Lai iegūtu funkcijas $y = f(x) + d$ grafiku, funkcijas $y = f(x)$ grafiks koordinātu plaknē **jāpārbīda paralēli y asij**:

- par $|d|$ vienībām **uz augšu**, ja $d > 0$,
- par $|d|$ vienībām **uz leju**, ja $d < 0$.

Lai iegūtu funkcijas $y = f(x + c)$ grafiku, funkcijas $y = f(x)$ grafiks koordinātu plaknē **jāpārbīda paralēli x asij**:

- par $|c|$ vienībām **pa kreisi**, ja $c > 0$,
- par $|c|$ vienībām **pa labi**, ja $c < 0$.

Grafiku deformācija

Grafiku $y = a \cdot f(x)$ iegūst, funkcijas $y = f(x)$ grafiku:

- **izstiepjot** paralēli ordinātu asij a reizes, ja $a > 1$,
- **saspiežot** paralēli ordinātu asij $\frac{1}{a}$ reizes, ja $0 < a < 1$.

Mainoties koeficientam a, visas vērtības paliek tieši a reizes lielākas $(a > 0)$.

Grafiku $y = f(bx)$ iegūst, funkcijas $y = f(x)$ grafiku:

- **izstiepjot** paralēli abscisu asij $\frac{1}{b}$ reizes, ja $0 < b < 1$,
- **saspiežot** paralēli abscisu asij b reizes, ja $b > 1$.

Grafiku simetriska attēlošana

Grafiku $y = -f(x)$ iegūst, attēlojot funkcijas $y = f(x)$ grafiku **simetriski attiecībā pret Ox asi.**

Grafiku $y = f(-x)$ iegūst, attēlojot funkcijas $y = f(x)$ grafiku **simetriski attiecībā pret Oyx asi.**

Uzdevums

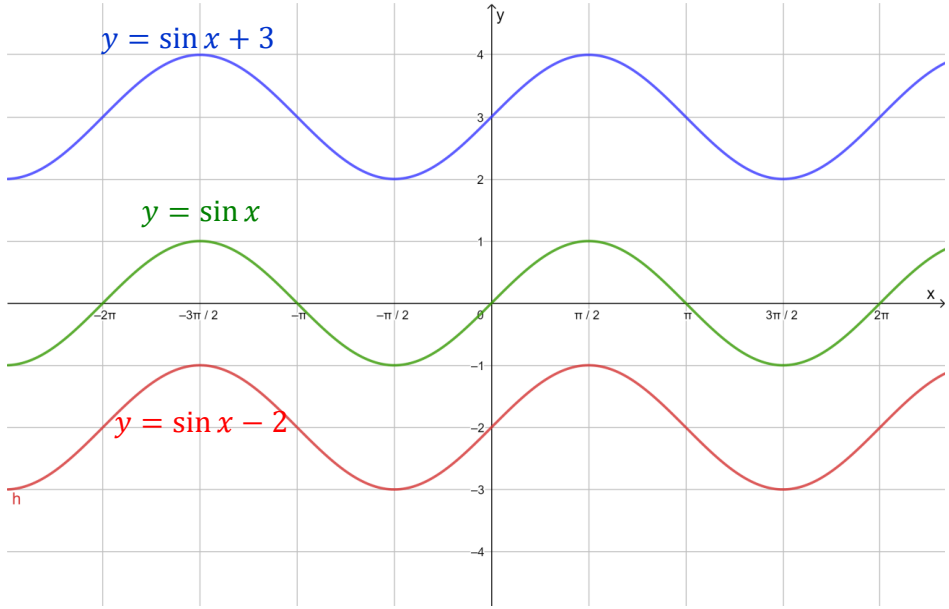
Izmantojot digitālo rīku https://www.geogebra.org/calculator, izpētīt funkciju grafikus, noteikt funkciju īpašības, to grafiku īpašības un novietojumu koordinātu plaknē, saistot ar funkciju $y = \sin x$, $y = \cos x$ īpašībām un novietojumu.

1 $y = f(x) + d$

1) $y = \sin x$

2) $y = \sin x + 3$

3) $y = \sin x - 2$



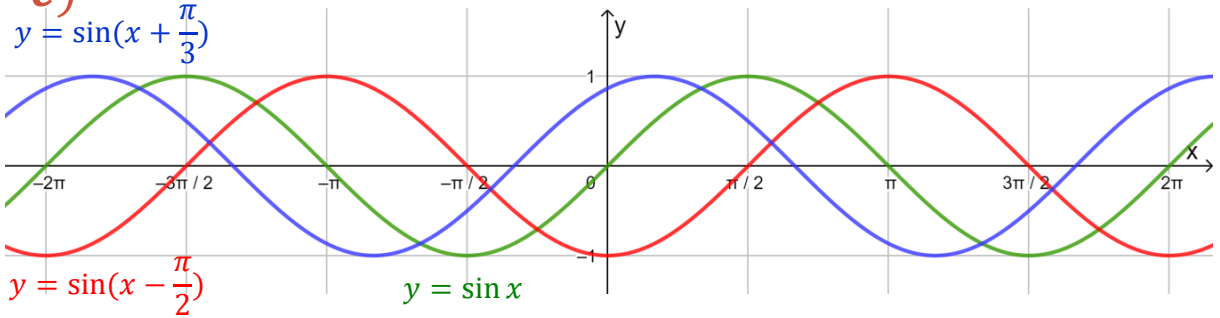
- Grafiku $y = \sin x + 3$ iegūst, $y = \sin x$ grafiku pārbīdot **uz augšu par 3** vienībām.
- Grafiku $y = \sin x - 2$ iegūst, $y = \sin x$ grafiku pārbīdot **uz leju par 2** vienībām.
- Grafiku forma nemainās.

ĪPAŠĪBAS

Nemainās	Mainās
Definīcijas kopa $D(y)$	Vērtību kopa $E(y)$
Periodiskums, T = 2π	Krustpunkti ar x asi
Augšanas / dilšanas intervāli	Krustpunkts ar y asi
	Maiņzīmju intervāli

2 $y = f(x + c)$

1) $y = \sin x$
2) $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$
3) $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$



- Grafiku $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$ iegūst, $y = \sin x$ grafiku pārbīdot **pa labi par** $\frac{\pi}{2}$ vienībām.
- Grafiku $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ iegūst, $y = \sin x$ grafiku pārbīdot **pa kreisi par** $\frac{\pi}{3}$ vienībām.

ĪPAŠĪBAS

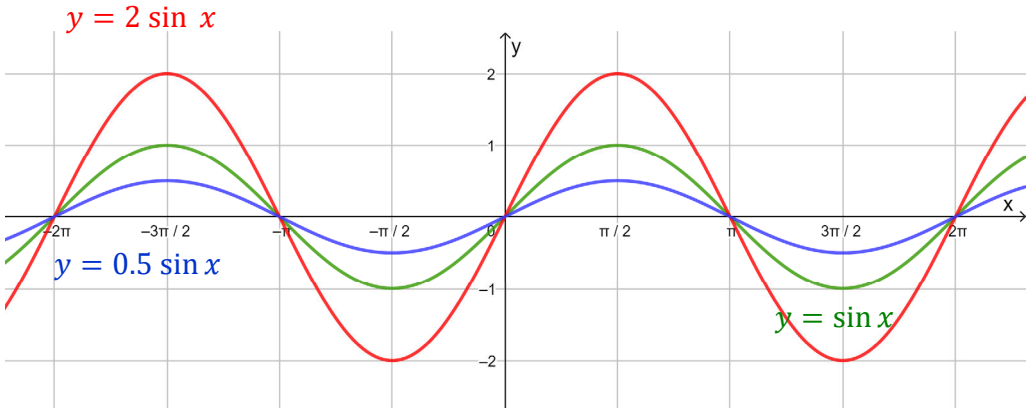
Nemainās	**Mainās**
Definīcijas kopa $D(y)$ Vērtību kopa $E(y)$ Periodiskums, T = 2π	Krustpunkti ar x asi Krustpunkts ar y asi
Maksimālas / minimālas vērtības	Augšanas / dilšanas intervāli Maiņzīmju intervāli

3 $y = af(x)$

1) $y = \sin x$

2) $y = 2\sin x$

3) $y = 0,5\sin x$



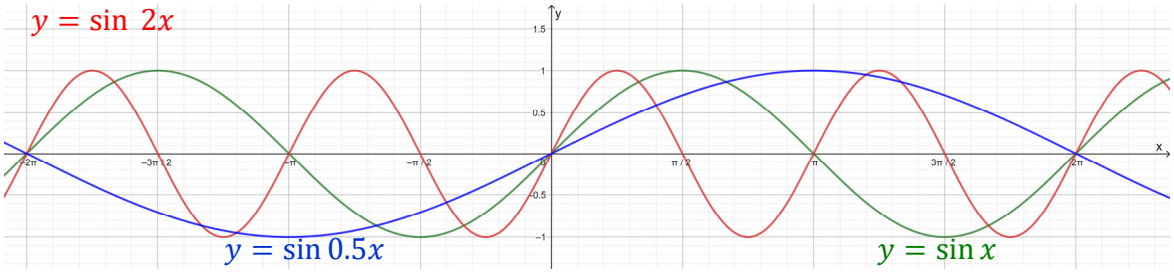
- Grafiku $y = 2\sin x$ iegūst, $y = \sin x$ grafiku izstiepjot paralēli ordinātu asij 2 reizes. Visas vērtības paliek 2 reizes lielākas.
- Grafiku $y = 0,5\sin x$ ($a = \frac{1}{2}$) iegūst, $y = \sin x$ grafiku saspiežot 2 reizes. Visas vērtības palielinās $0,5 = \frac{1}{2}$ reizes (paliek 2 reizes

ĪPAŠĪBAS

Nemainās	Mainās
Definīcijas kopa $D(y)$	Vērtību kopa $E(y)$
Periodiskums, T = 2π	Maksimālas / minimālas vērtības
Krustpunkti ar x asi	
Krustpunkts ar y asi	
Augšanas / dilšanas intervāli	
Mainzīmju intervāli	

4 $y = f(bx)$

1) $\boldsymbol{y = sin\, x}$
2) $\boldsymbol{y = sin\, 2x}$
3) $\boldsymbol{y = sin\, 0.5x}$



- Grafiku $\boldsymbol{y = sin\, 2x}$ iegūst, $\boldsymbol{y = sin\, x}$ grafiku saspiežot paralēli x asij 2 reizes .
- Grafiku $\boldsymbol{y = sin\, 0.5x}$ $(b = \frac{1}{2})$ iegūst, $\boldsymbol{y = sin\, x}$ grafiku izstiepjot 2 reizes paralēli x asij.

ĪPAŠĪBAS

Nemainās	**Mainās**
Definīcijas kopa $D(y)$	Periodiskums, $T_1 = \frac{T}{\lvert b\rvert} = \frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$
Vērtību kopa $E(y)$	Krustpunkti ar x asi
Krustpunkts ar y asi	Augšanas / dilšanas intervāli
Maksimālas / minimālas vērtības	Maiņzīmju intervāli

UZDEVUMI

UZDEVUMU ATRISINĀŠANAS PIEMĒRI

1. uzdevums

Uzzīmēt funkciju grafikus, pārveidojot atbilstošo elementāras pamatfunkcijas grafiku.

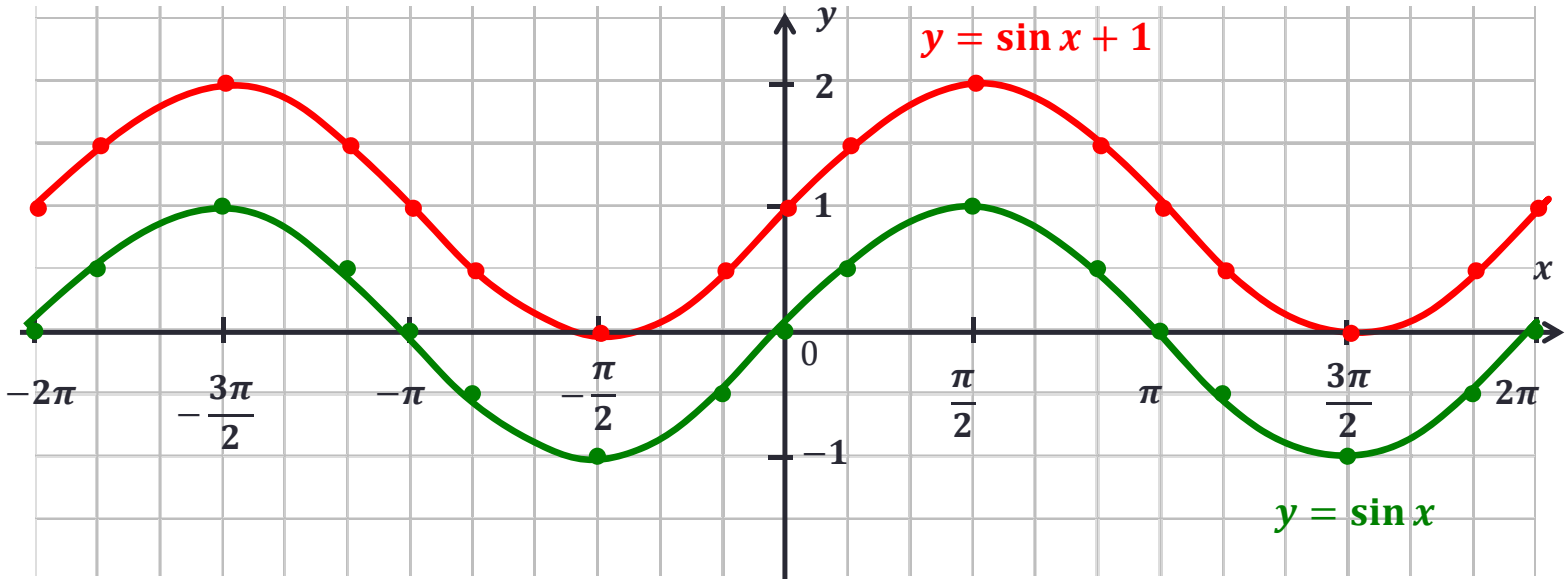
1.1. Konstruēt funkcijas $y = sin\, x + 1$ grafiku.

Piezīme:

Konstruējot funkcijas grafiku, pieņem, ka **π atbilst 6 rūtiņām**

Atrisinājums:

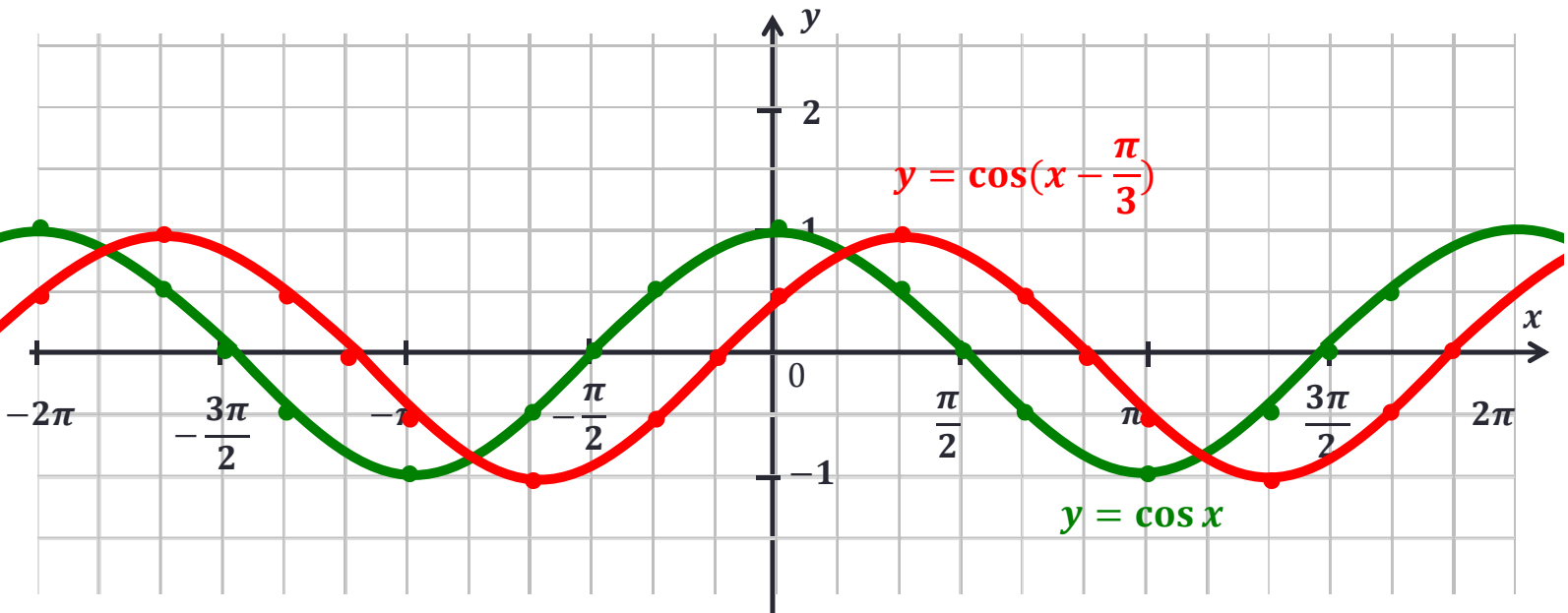
1. Konstruē funkcijas $y = \sin x$ grafiku.
2. Pārbīda uz augšu par 1 vienību paralēli y asij.



1.2. Konstruēt funkcijas $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ grafiku.

Atrisinājums:

1. Konstruē funkcijas $y = \cos x$ grafiku.
2. Pārbīda **pa labi par $\frac{\pi}{3}$ vienībām** pa x asi.

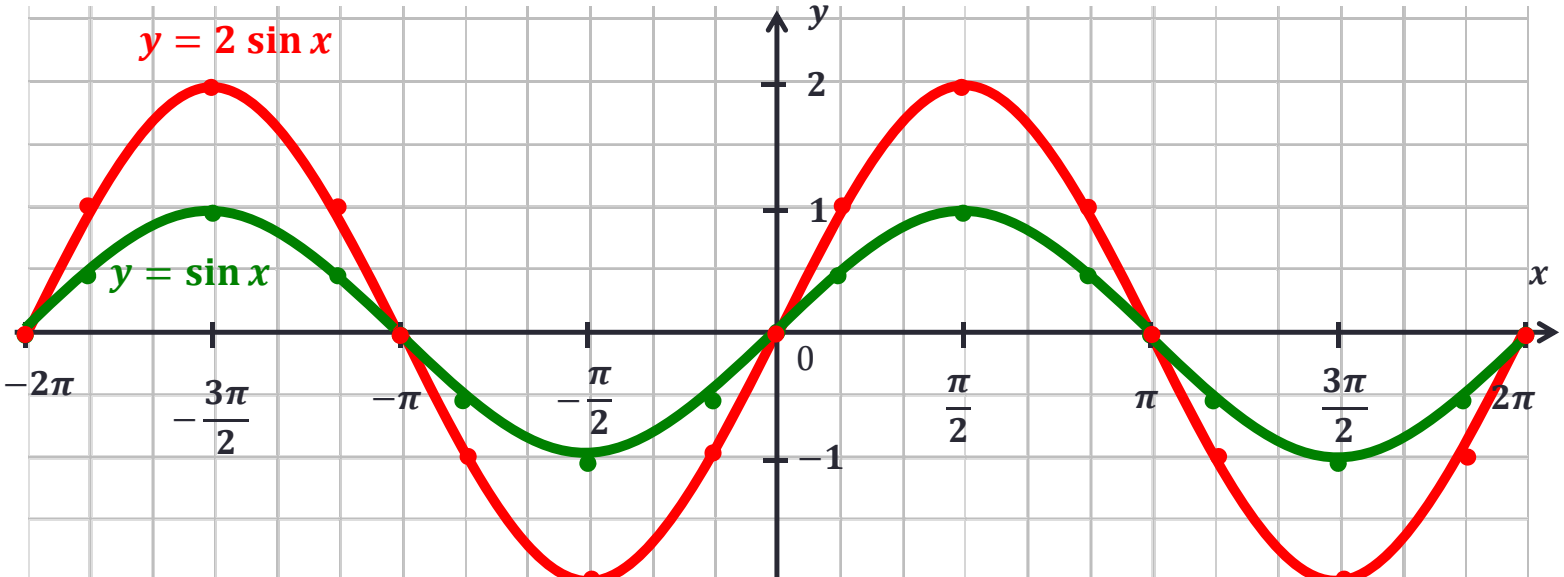


1.3. Konstruēt funkcijas $y = 2sin\,x$ grafiku.

Atrisinājums:

1. Konstruē funkcijas $y = \sin x$ grafiku.
2. Izstiepj 2 reizes paralēli y asij.

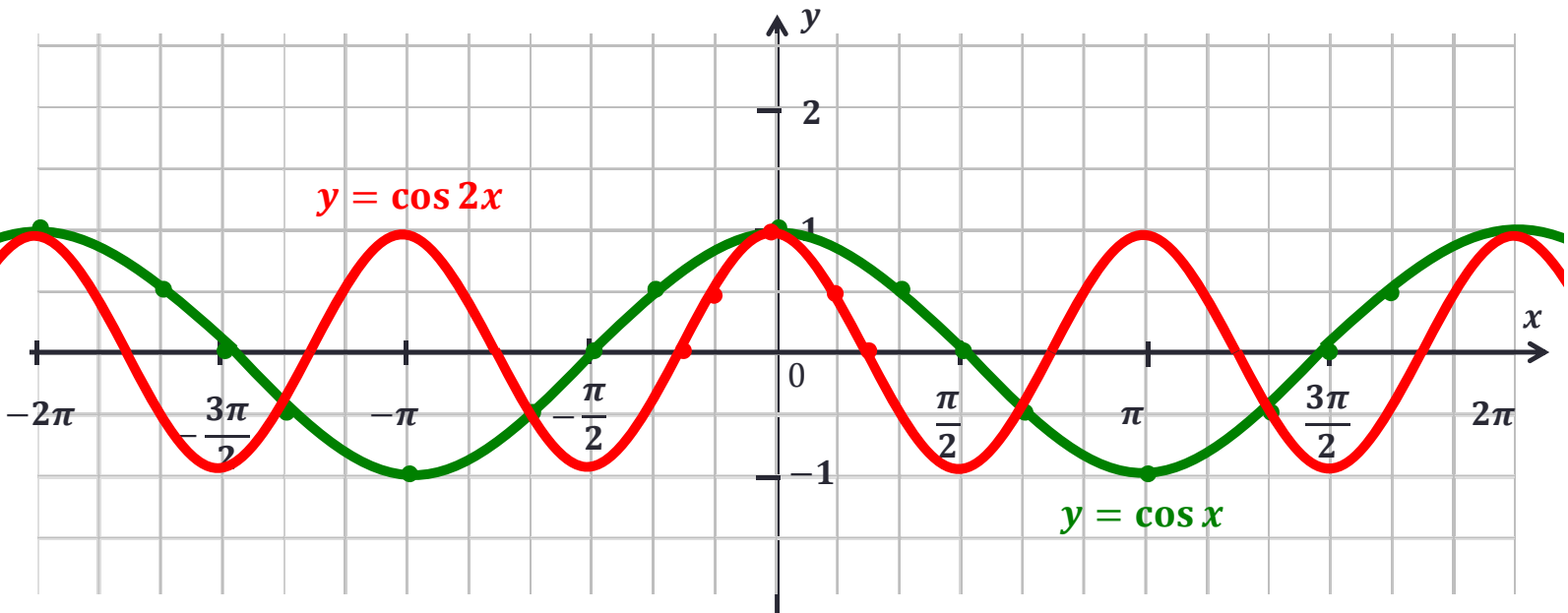
Visas vērtības palielinās 2 reizes.



1.4. Konstruēt funkcijas $y = \cos 2x$ grafiku.

Atrisinājums:

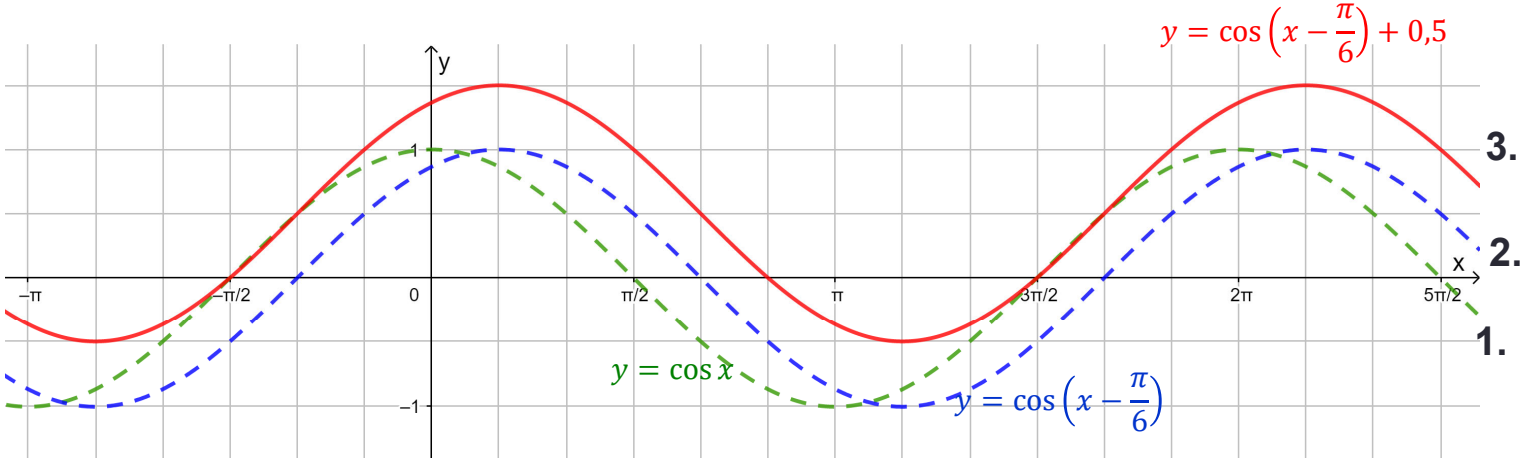
1. Konstruē funkcijas $y = \cos x$ grafiku.
2. Saspiež pa x asi 2 reizes.



1.5. Konstruēt funkcijas grafiku $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 0,5$.

Atrisinājums:

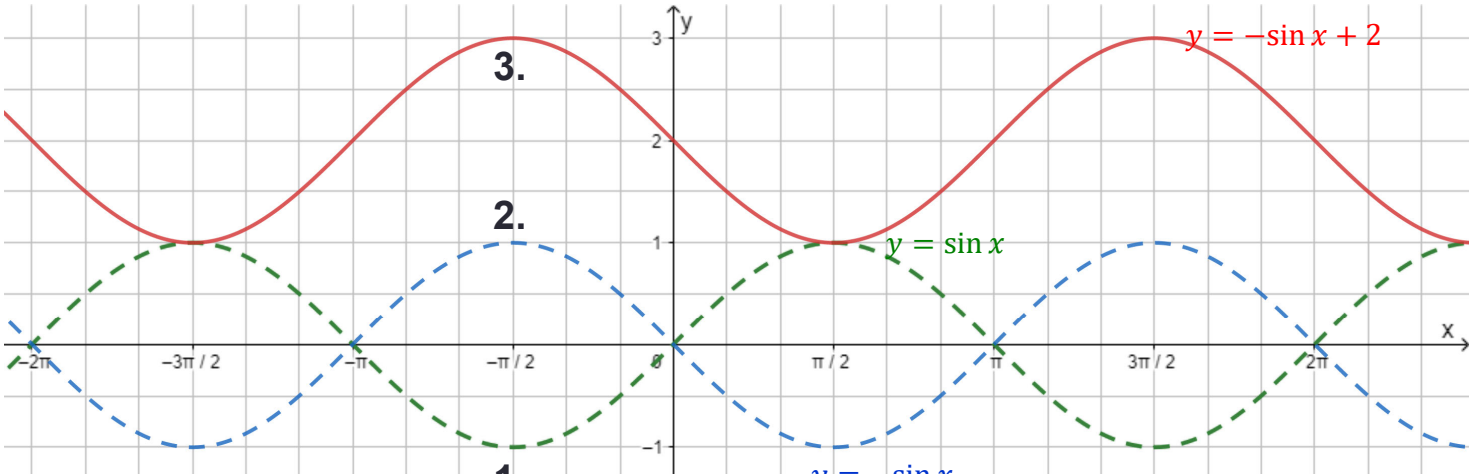
1. Konstruē funkcijas $y = \cos x$ grafiku.
2. Pārbīda pa x asi pa labi par $\frac{\pi}{6}$ vienībām.
3. Pārbīda uz augšu par 0,5 vienībām paralēli y asij.



1.6. Konstruēt funkcijas grafiku $y = -\sin x + 2$.

Atrisinājums:

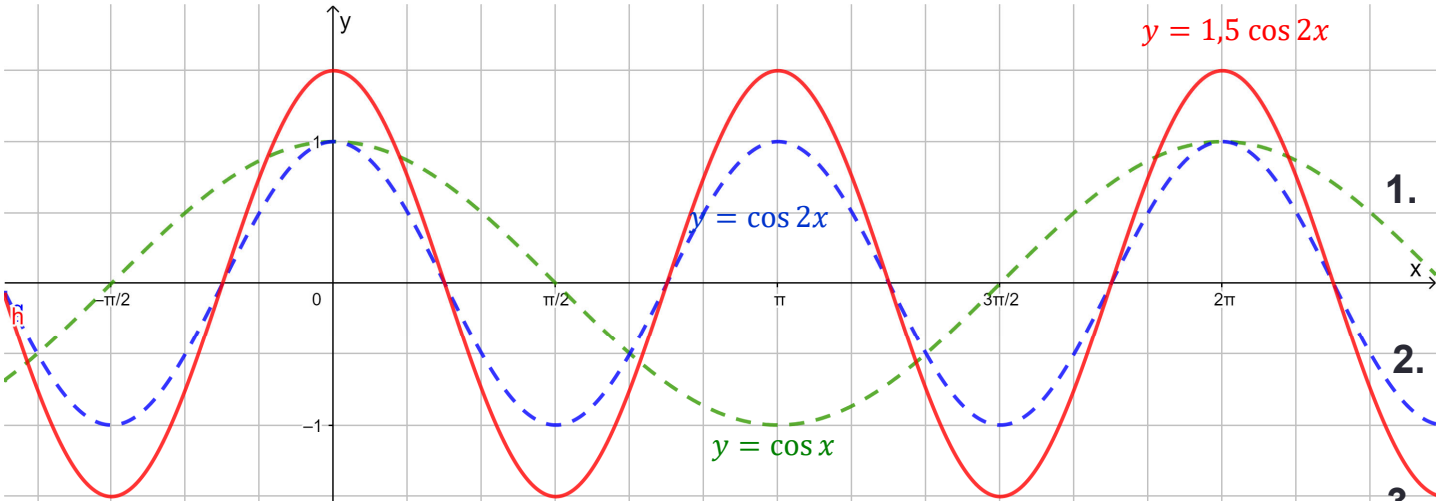
1. Konstruē funkcijas $y = \sin x$ grafiku.
2. Attēlo simetriski pret x asi.
3. Pārbīda uz augšu par 2 vienībām paralēli y asij.



1.7. Konstruēt funkcijas grafiku $y = 1,5 \cdot \cos 2x$.

Atrisinājums:

1. Konstruē funkcijas $y = \cos x$ grafiku.
2. Saspiež pa x asi 2 reizes.
3. Izstiepj 1,5 reizes paralēli y asij.

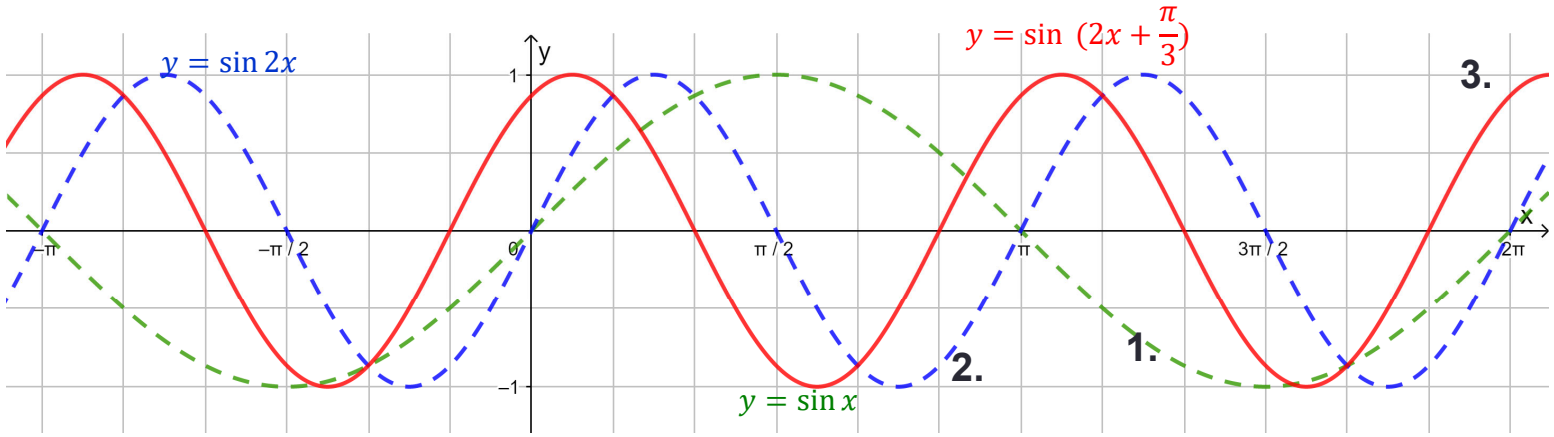


1.8. Konstruēt funkcijas grafiku $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$.

Atrisinājums:

Pārveido $y = \sin(2(x + \frac{\pi}{6}))$

1. Konstruē funkcijas $y = \sin x$ grafiku.
2. Saspiež pa x asi 2 reizes.
3. Pārbīda pa x asi pa kreisi par $\frac{\pi}{6}$.



2. uzdevums

Noteikt funkcijas $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 3$ vērtību kopu.

Atrisinājums:

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \qquad | \cdot 2$$

$$-2 \leq 2 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 2 \qquad | -3$$

$$-2 - 3 \leq 2 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 3 \leq 2 - 3$$

$$-5 \leq 2 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 3 \leq -1$$

3. uzdevums

Noteikt funkcijas $y = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 4$ periodu.

Atrisinājums:

Funkcijas $\boldsymbol{y = a \cdot \sin(b(x + c)) + d}$ periodu ietekmē koeficients b.

Pārveido:

$$\boldsymbol{y = 3\sin\left(2(x + \frac{\pi}{12})\right) - 4}$$

$T = 2\pi$ - pamatfunkcijas ($y = \sin x$) periods

$$T_1 = \frac{T}{|b|} = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

Atbilde: $T = \pi$.

UZDEVUMI PATSTĀVĪGAJAM DARBAM

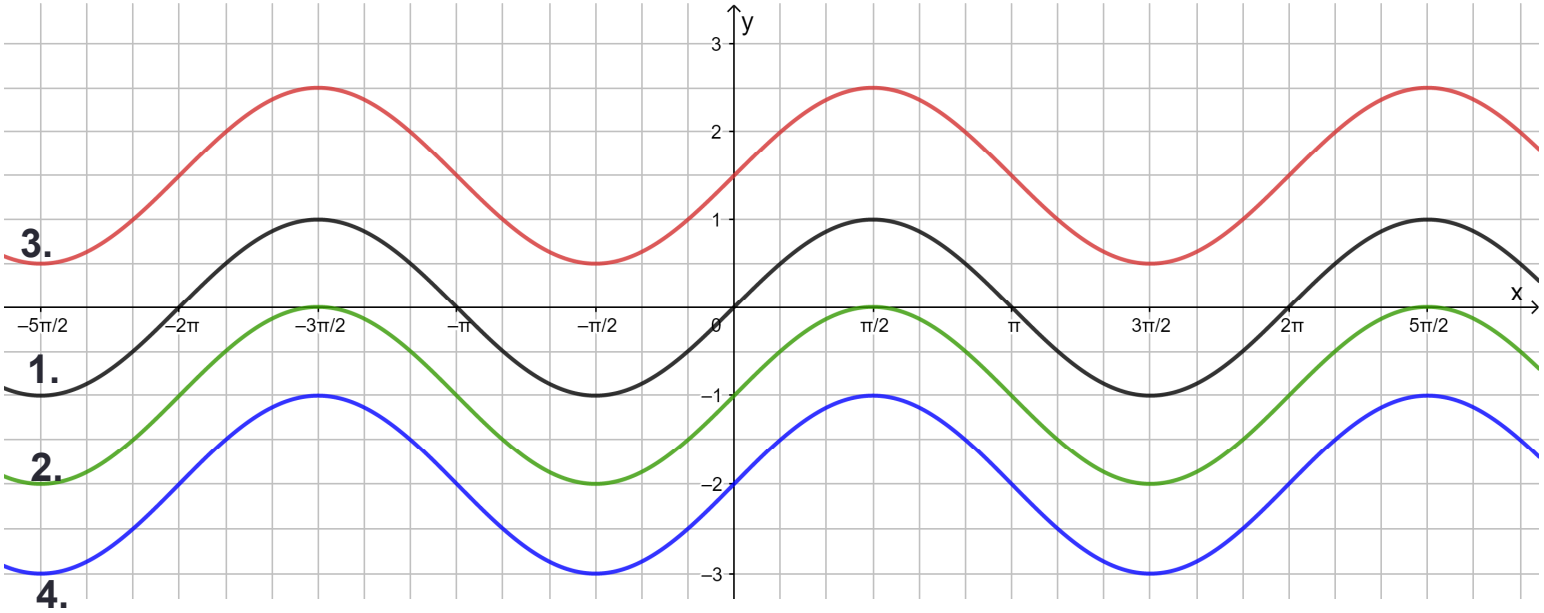
1. uzdevums. Konstruēt funkciju grafikus.

1) $y = 1{,}5 + \sin x$
2) $y = -\sin x - 2$
3) $y = 3 + \sin x$
4) $y = \sin x - 3$
5) $y = \cos x + 2$
6) $y = -\cos x - 3$
7) $y = -\cos x + 1{,}5$
8) $y = \cos x - 5$
9) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
10) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
11) $y = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
13) $y = \sin(x + \pi)$
14) $y = -cos\ (x - \pi) - 1$
15) $y = -\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
16) $y = 2\sin x$
17) $y = -2\cos x$
18) $y = 3\sin x + 1$
19) $y = 3\cos\frac{x}{2}$
20) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$
21) $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$
22) $y = \sin 4x + 1$
23) $y = \cos 4x + 0{,}5$

2. uzdevums.

Noteikt, kādu funkciju grafiki attēloti zīmējumā.

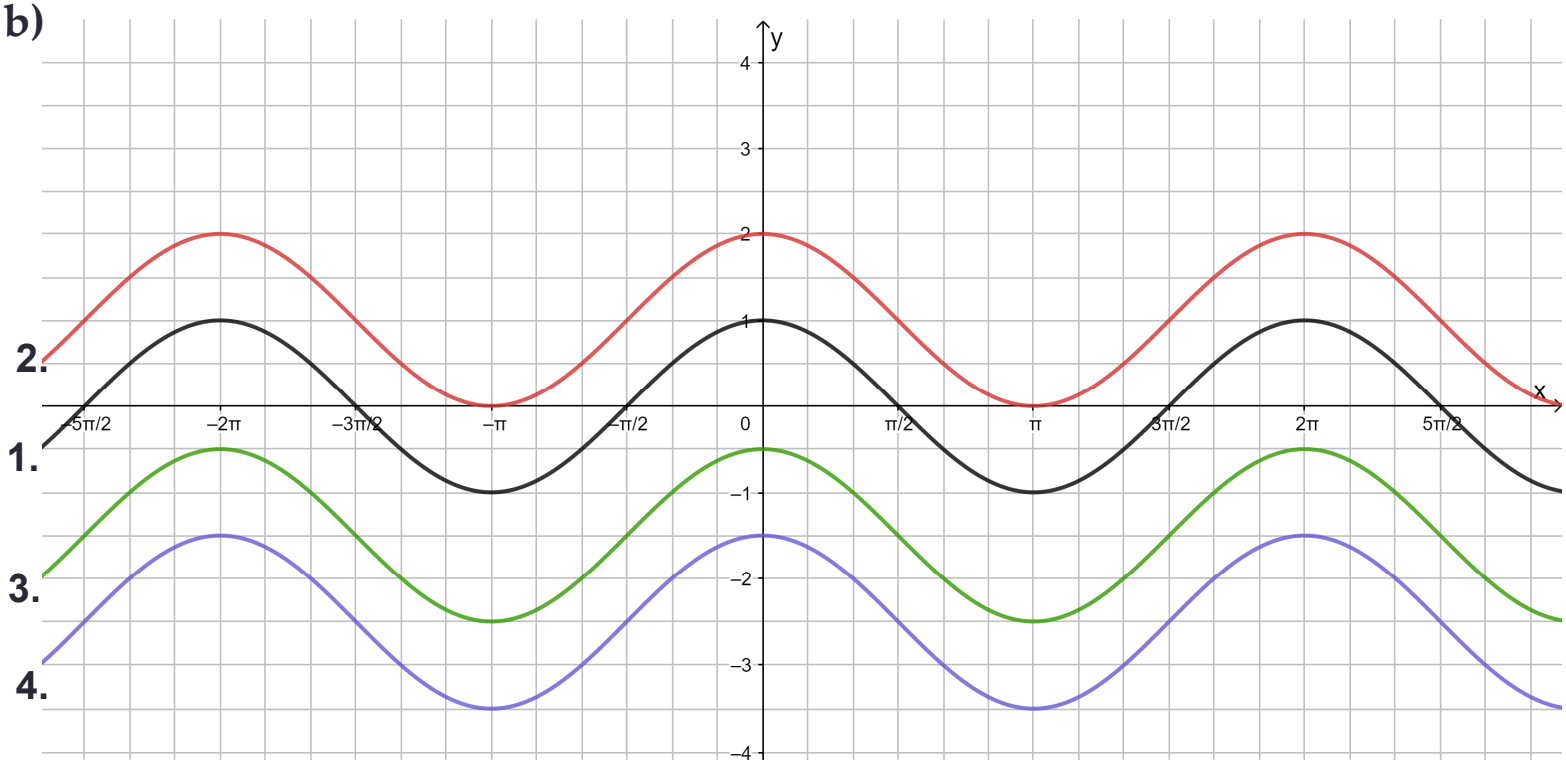
a)



2. uzdevums.

Noteikt, kādu funkciju grafiki attēloti zīmējumā.

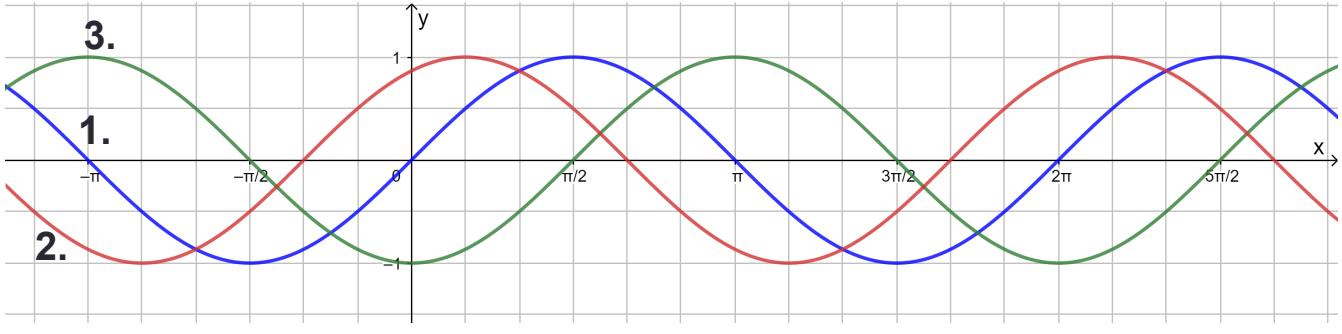
b)



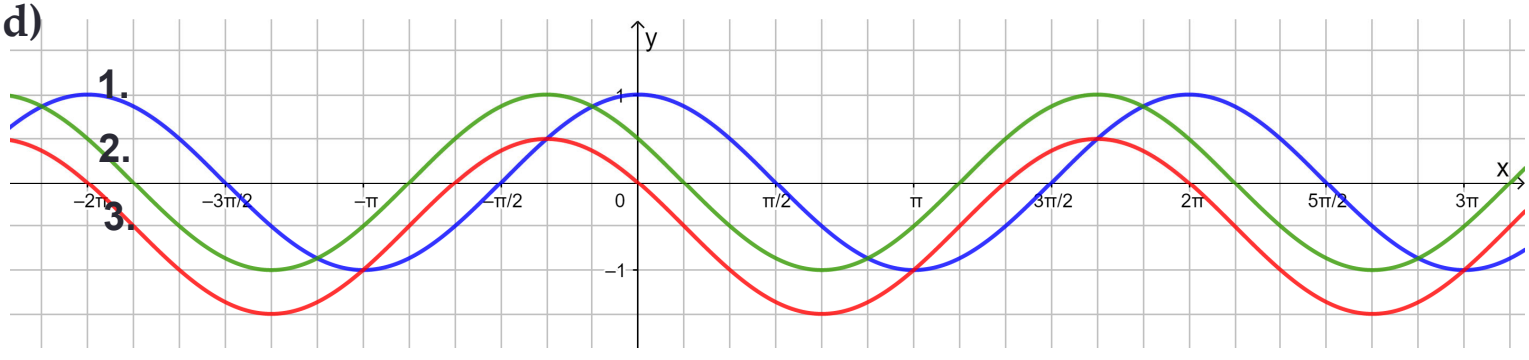
2. uzdevums.

Noteikt, kādu funkciju grafiki attēloti zīmējumā.

c)



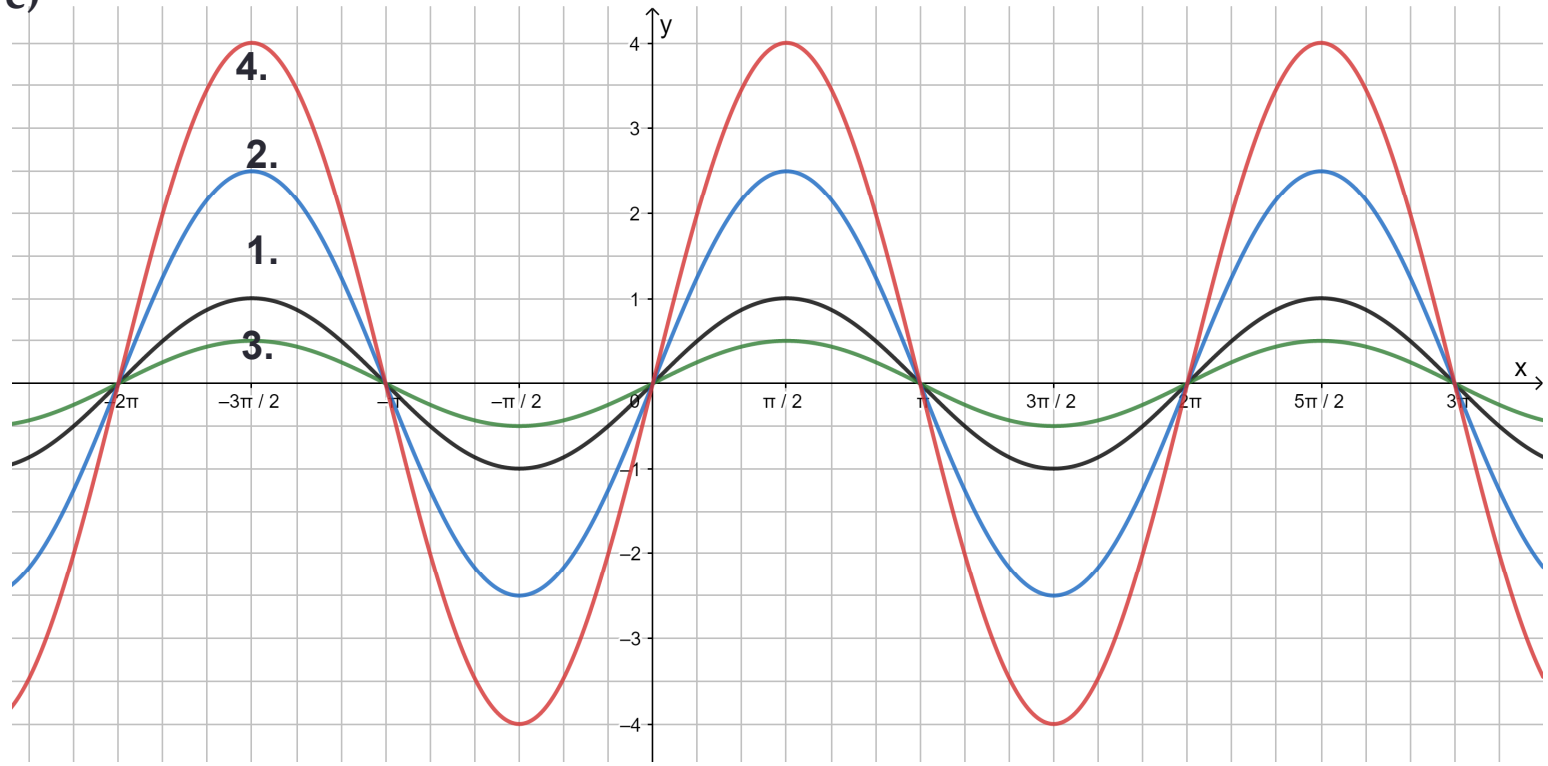
d)



2. uzdevums.

Noteikt, kādu funkciju grafiki attēloti zīmējumā.

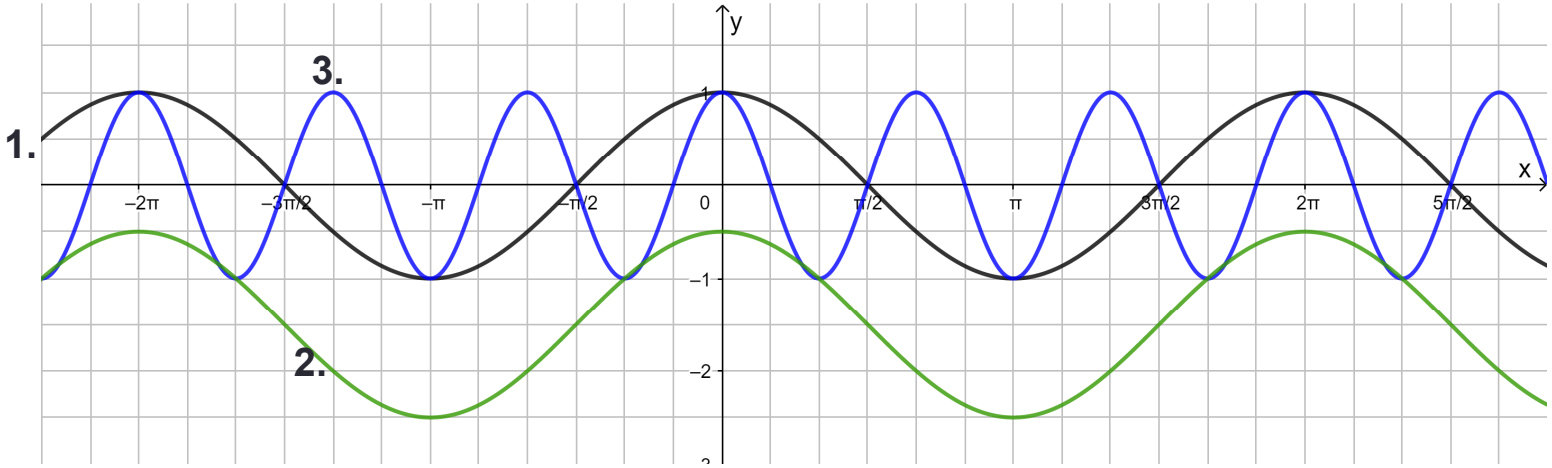
e)



2. uzdevums.

Noteikt, kādu funkciju grafiki attēloti zīmējumā.

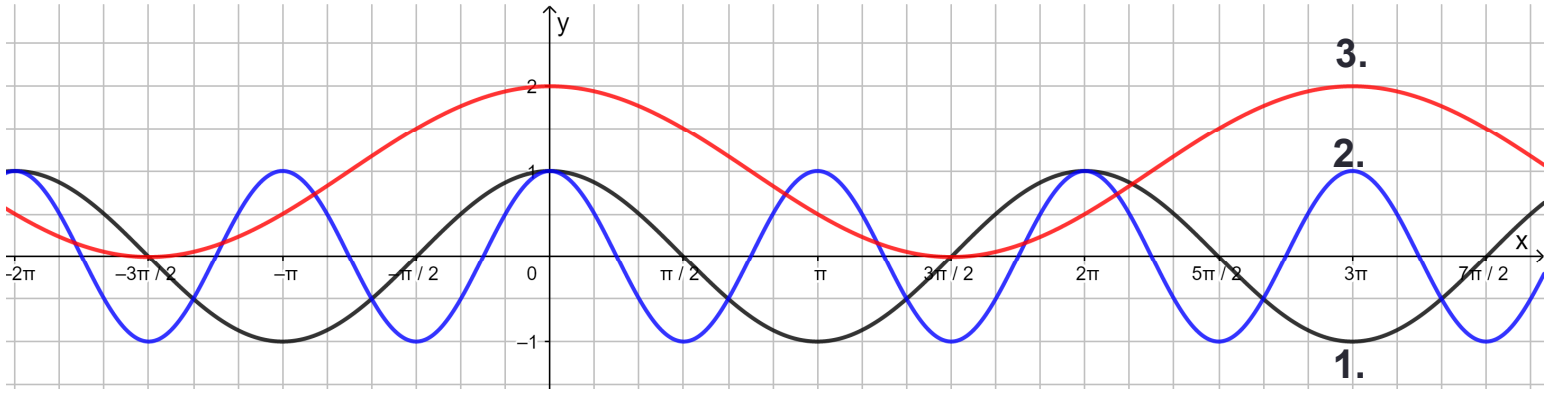
f)



2. uzdevums.

Noteikt, kādu funkciju grafiki attēloti zīmējumā.

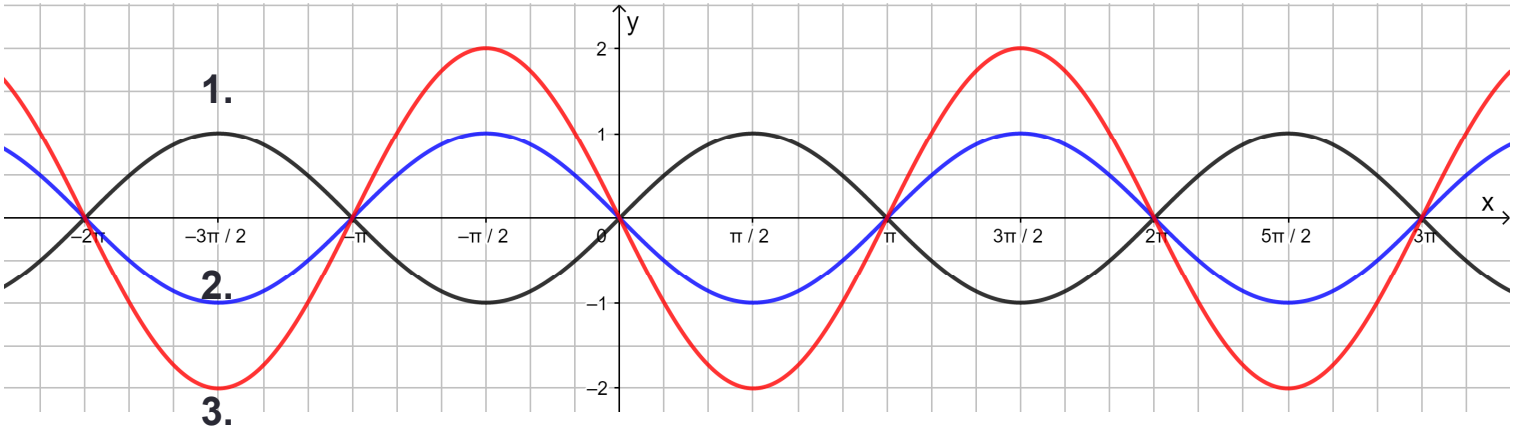
g)



2. uzdevums.

Noteikt, kādu funkciju grafiki attēloti zīmējumā.

h)



3. uzdevums.

Noteikt funkcijas vērtību kopu un periodu.

1) $y = \sin x$
2) $y = \sin x - 2$
3) $y = 3 - 2\sin x$
4) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
5) $y = 3\cos x - 2$
6) $y = -\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 3$
7) $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 4$

LITERATŪRAS SARAKSTS

D. Kriķis, K. Šteiners. *Matemātiskās analīzes elementi vidusskolai. 1. daļa.* – Zvaigzne ABC, 2018.

S. Grunsberga, L. Stāmure. *Standartuzdevumi algebrā ar risinājumu piemēriem*. 10.-12. klase. - Lielvārds, 2003.

Elektroniskie resursi:

https://www.geogebra.org/calculator