Taišņu un plakņu savstarpējais novietojums telpā

MIKC „DDMV „Saules skola”””
Vispārējās izglītības programma
Mācību priekšmets: **Matemātika I, 3. kurss**
Autors: **Nataļja Soikāne**
2025./2026.m.g.

Anotācija

Nataļja Soikāne

Taišņu un plakņu savstarpējais novietojums telpā

Metodiskā izstrādne dod iespēju matemātikas stundās

- iepazīstināt izglītojamos ar stereometrijas pamatjēdzieniem, stereometrijas aksiomām un secinājumiem no tām;
- iemācīt raksturot un pamatot divu taišņu, taisnes un plaknes, divu plakņu savstarpējo novietojumu telpiskās figūrās;
- iemācīt lietot atbilstošus simbolus, pieņemtos apzīmējumus un jēdzienus figūru savstarpējā novietojuma raksturošanai, spriedumu un uzdevumu atrisinājuma pierakstīšanai.

Prezentācijā apkopoti teorētiskie pamati ar uzdevumu atrisināšanas piemēriem, darbs satur arī uzdevumus patstāvīgajam darbam.

Mērķauditorija: izglītojamie.

Saturs

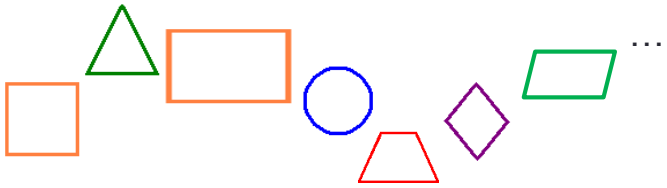
1. Stereometrijas pamatjēdzieni. Piederības aksiomas. Teorēmas.
2. Uzdevumi patstāvīgajam darbam.
3. Taisnes un plaknes savstarpējais novietojums.
4. Taišņu savstarpējais novietojums telpā.
5. Divu plakņu savstarpējais novietojums telpā.
6. Uzdevumi patstāvīgajam darbam.
7. Literatūras saraksts.

1. Stereometrijas pamatjēdzieni. Piederības aksiomas. Teorēmas.

Ģeometrija

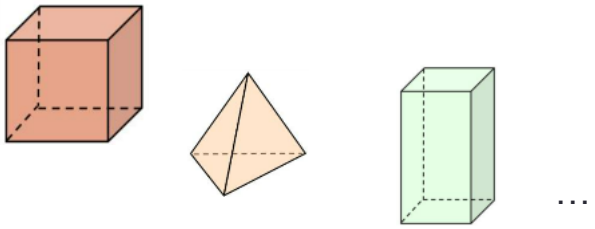
Planimetrija

- pēta **plaknes** figūru īpašības



Stereometrija

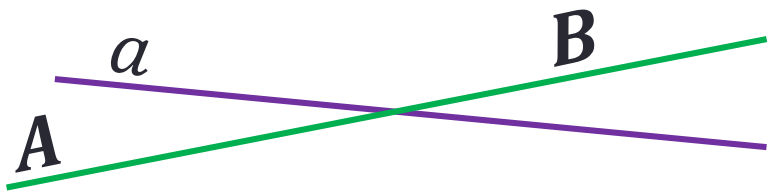
- pēta **telpisku** figūru īpašības



Stereometrijas pamatjēdzieni
(pieņem bez definēšanas)

- punkts,
- taisne,
- plakne.







Aksioma ir apgalvojums, kuru pieņem par patiesu bez pierādījuma.

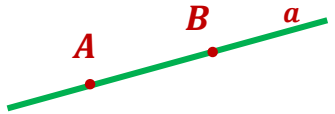
Teorēma ir apgalvojums, kuru pierāda, loģiskā ceļā nonākot no nosacījuma pie slēdziena.

Eiklīda ģeometrijā

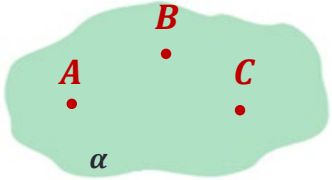
punktu, **taišņu** un **plakņu** pamatīpašības, kas attiecas uz to savstarpējo novietojumu (raksturo ar vienu vārdu, - **piederība**), izteiktas 20 aksiomās.

Piederības aksiomas

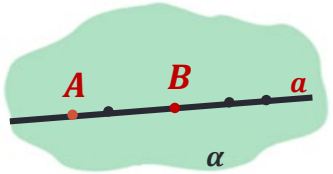
1. ***Caur jebkuriem diviem telpas punktiem var novilkt vienu vienīgu taisni.***



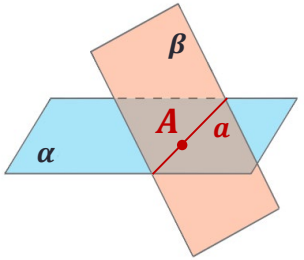
2. ***Caur jebkuriem trim telpas punktiem, kas neatrodas uz vienas taisnes, var novilkt vienu vienīgu plakni.***



3. *Ja **divi** taisnes **punkti pieder plaknei**, **tad visi** šīs taisnes **punkti pieder plaknei**.*



4. ***Ja divām plaknēm ir kopīgs punkts, tad tām ir kopīga taisne,*** *uz kuras atrodas visi plakņu kopīgie punkti.*



Piemēri no reālās dzīves





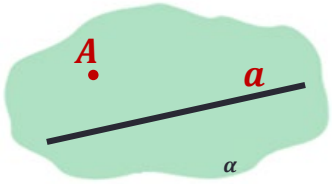




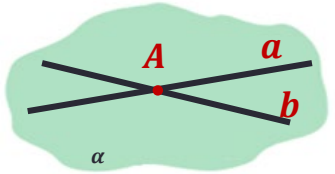
Plaknes novilkšana (teorēmas)

Pamatojoties uz aplūkotajām aksiomām, var pierādīt vairākas teorēmas, kas nosaka, **kādos gadījumos iespējams novilkt vienu vienīgu plakni.**

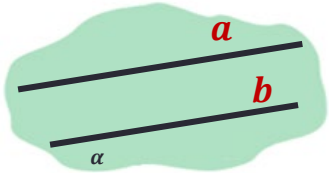
1. **Caur taisni un punktu, kas tai nepieder, var novilkt vienu vienīgu plakni.**



2. **Caur divām krustiskām taisnēm var novilkt vienu vienīgu plakni.**



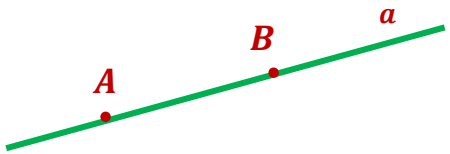
3. **Caur divām paralēlām taisnēm telpā var novilkt vienu vienīgu plakni.**



Secinājumi

Taisni viennozīmīgi nosaka

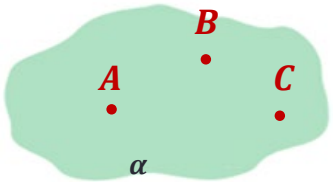
jebkuri divi punkti.



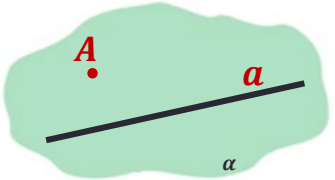
Secinājumi

Plakni viennozīmīgi nosaka:

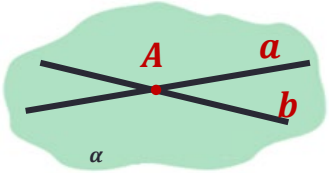
1. **jebkuri trīs punkti, kas neatrodas uz vienas taisnes;**



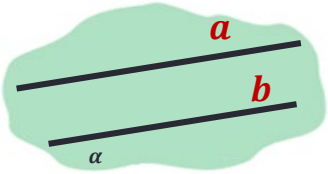
2. **taisne un punkts, kas tai nepieder;**



3. **divas krustiskas taisnes;**



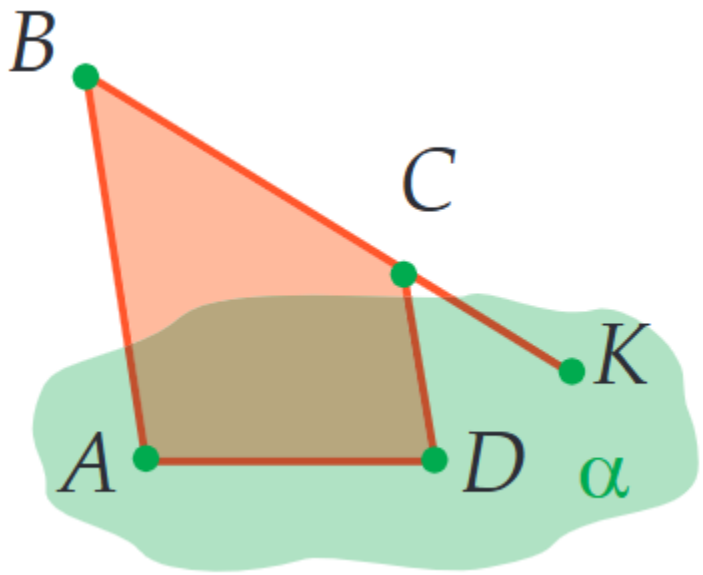
4. **divas paralēlas taisnes.**



2. Uzdevumi patstāvīgajam darbam

Uzdevumi

6.2. Aplūko 6.11. att., kurā dots četrstūris $ABCD$, taisne AD, kas atrodas plaknē α, taisne BC, kas krusto plakni α punktā K. Vai zīmējums ir pareizs? Pamato savu atbildi.



6.11. att.

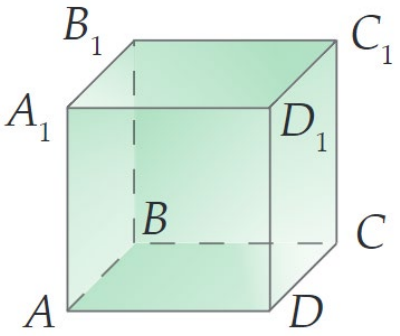
Uzdevumi

6.3. Dots kubs $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Cik dažādas plaknes var novilkt caur virsotnēm

a) A un B;
b) A un C_1;
c) A, D_1 un C_1;
d) A, B un C_1;
e) A, D_1, B_1 un B;
f) A, A_1, B_1 un B?

6.4. Uzzīmē kubu $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Kubā

a) atliec trīs punktus, kas atrodas uz taisnes AC_1,
b) atliec punktu, kas atrodas gan uz taisnes AD_1, gan uz A_1D,
c) iezīmē plakņu AA_1D_1D un AD_1C_1B šķēluma līniju.



Uzdevumi

6.5. Vai plaknē var atrasties tikai

a) divas viena trijstūra virsotnes;
b) trīs viena četrstūra virsotnes;
c) četras viena piecstūra virsotnes;
d) viena sešstūra virsotne?

6.6. Kuri no apgalvojumiem ir patiesi?

a) Ja divām taisnēm ir kopīgs punkts, tad tām noteikti ir vēl citi kopīgi punkti.
b) Caur trim punktiem, kas atrodas uz vienas taisnes, var novilkt plakni.
c) Ja 4 punkti atrodas vienā plaknē, tad tie noteikti atrodas uz vienas taisnes.
d) Piecām taisnēm un vienai plaknei var būt 6 kopīgi punkti.
e) Trim taisnēm var nebūt kopīgu punktu.

Uzdevumi

6.9. Aplūko 6.12. att. un, izmantojot attēlā dotos burtus, nosaki:

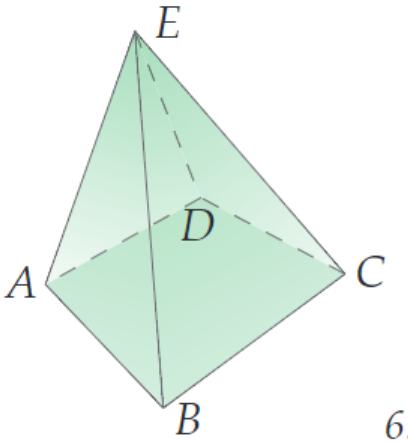
a) plaknes, kurās atrodas taisne ED;

b) punktus, kas atrodas gan plaknē ABE, gan plaknē DCB;

c) taisni, pa kuru šķeļas plaknes AED un EDC;

d) kurām divām plaknēm pieder taisne BC;

e) kura taisne atrodas gan plaknē ADB, gan plaknē EBD.



6.12. att.

Uzdevumi

6.10. Punkti A, B, C un D neatrodas vienā plaknē.
Vai punkti B, C un D varētu atrasties uz vienas taisnes?
Vai ir iespējams, ka taisnes AB un CD krustojas? Atbildi pamato.

6.11. Telpā doti trīs punkti. Caur tiem novilktas divas taisnes. Vai šīs taisnes atrodas vienā plaknē? Atbildi pamato.

6.12. Taisne iet caur vienu trijstūra virsotni. Vai šī taisne atrodas trijstūra plaknē? Izveido atbilstošu modeli.

6.13. Dotas trīs taisnes, kuras pa pāriem krustojas. Parādi visas iespējamās situācijas, izveidojot atbilstošus modeļus.

6.14. Dots punkts, taisne un plakne. Ilustrē visus iespējamos šo trīs elementu savstarpējos novietojumus. Katrā zīmējumā pieraksti šo elementu novietojumu, izmantojot simbolisko pierakstu.

Atbildes

6.3. a) Bezgalīgi daudz plakņu; b) bezgalīgi daudz plakņu; c) vienu plakni; d) vienu plakni; e) nevienu plakni; f) vienu plakni.

6.5. a) Jā; b) nē; c) nē; d) jā.

6.6. a) Nepatiess apgalv.; b) patiess apgalv.; c) nepatiess apgalv.; d) nepatiess apgalv.; e) patiess apgalv.

6.9. a) *AED*, *EBD* un *DEC*; b) visi punkti uz taisnes *AB*; c) *ED*; d) *EBC* un *ACB*; e) *BD*.

6.10. Nē; nē.

6.11. Jā.

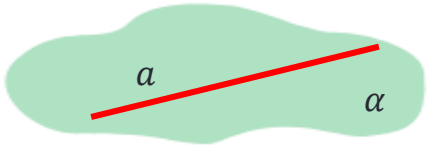
3. Taisnes un plaknes savstarpējais novietojums

Taisnes un plaknes savstarpējais novietojums

1. Taisne atrodas plaknē

$a \subset \alpha$

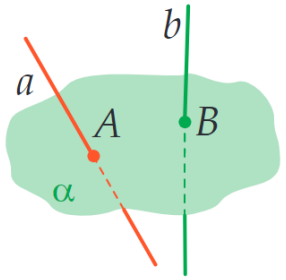
Kopīgo punktu skaits: bezgalīgi daudz.



2. Taisne krusto plakni

$a \cap \alpha = A$

Kopīgo punktu skaits: 1.



3. Taisne paralēla plaknei

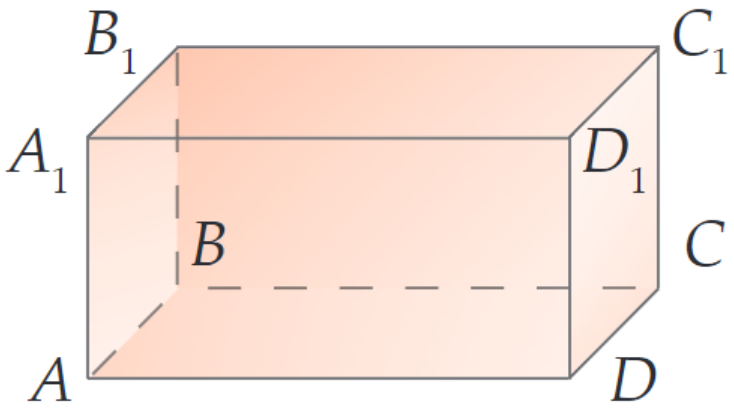
$a \parallel \alpha$

Kopīgo punktu skaits: 0 (nav).



Taisni un plakni sauc par paralēlām, ja tām nav kopīgu punktu.

Taisnes un plaknes savstarpējais novietojums



Taisnstūra paralēlskaldnis ir daudzskaldnis, kura visas skaldnes ir taisnstūri.

$AB \subset$

$AB \subset$

$AB \cap$

$AB \cap$

$AB \parallel$

$AB \parallel$

Taisnes un plaknes paralelitātes pazīme

Ja taisne, kas neatrodas dotajā plaknē, ir paralēla kādai šīs plaknes taisnei, tad tā ir paralēla arī pašai plaknei.

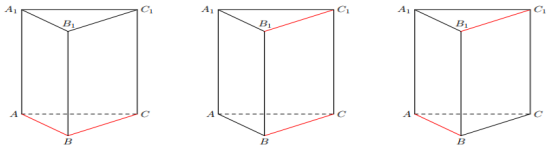
$$\left.\begin{array}{l} Ja\ a \not\subset \alpha, \\ b \subset \alpha, \\ a \parallel b \end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel \alpha$$



Lai pierādītu, ka taisne a paralēla plaknei α, jāatrod tāda taisne b, kas atrodas plaknē α un kura ir paralēla ar taisni a.

4. Taišņu savstarpējais novietojums telpā

Taišņu savstarpējais novietojums telpā



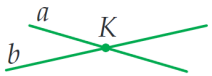
Telpā taisnes **var krustoties** un **var nekrustoties**.

Taisnes krustojas

- **Krustiskas taisnes**

*ir taisnes telpā, kas **krustojas**.*

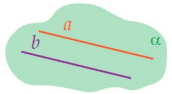
$\boldsymbol{a \cap b = K}$



Taisnes nekrustojas

- **Paralēlas taisnes**

*ir taisnes telpā, kas **nekrustojas** un **atrodas** vienā plaknē.*

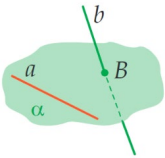


$\boldsymbol{a \cap b = \emptyset, a \subset \alpha, b \subset \alpha}$

$\boldsymbol{\Rightarrow a \parallel b}$

- **Šķērsas taisnes**

*ir taisnes telpā, kas **nekrustojas** un **neatrodas** vienā plaknē.*



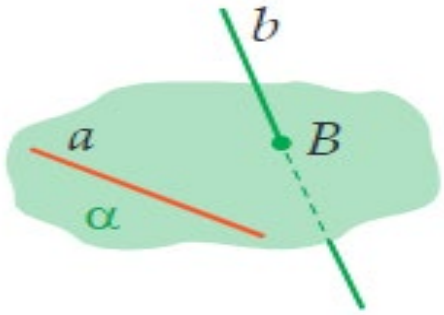
$a \cap b = \emptyset, a \subset \alpha, b \not\subset \alpha$

$\Rightarrow a \div b$

Šķērsu taišņu pazīme

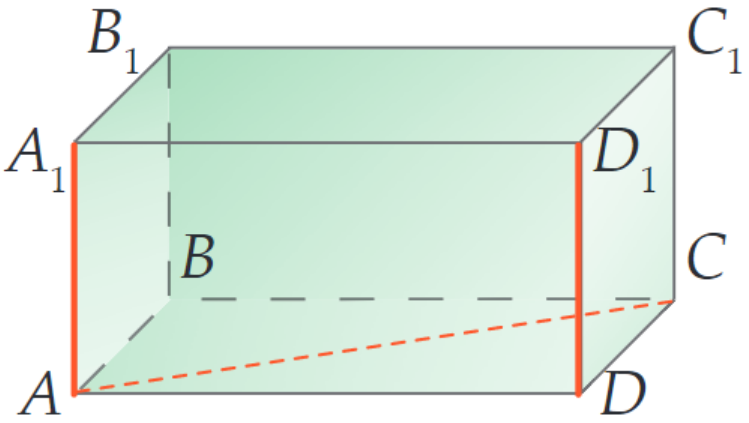
Ja viena no divām taisnēm atrodas plaknē, bet otra krusto šo plakni punktā, kas nepieder pirmajai taisnei, tad dotās taisnes ir šķērsas.

$$\left.\begin{array}{l} Ja\ a \subset \alpha, \\ b \cap \alpha = B \\ B \notin a, \end{array}\right\} \Longrightarrow a \div b$$



Piemērs

Noteikt taišņu AC, AA_1 *un* DD_1 savstarpējos stāvokļus.



AC un AA_1 *ir krustiskas taisnes, jo* $AC \cap AA_1 = A$.

AC un DD_1 *ir šķērsas taisnes, jo* $AC \in ABCD$, *bet* $DD_1 \cap ABCD = D$, $D \notin AC$.

$AA_1 \parallel DD_1$, *jo atrodas vienā plaknē* (AA_1D_1D) *un nekrustojas (taisnstūra pretējās malas).*

5. Divu plakņu savstarpējais novietojums telpā

Divu plakņu savstarpējais novietojums telpā

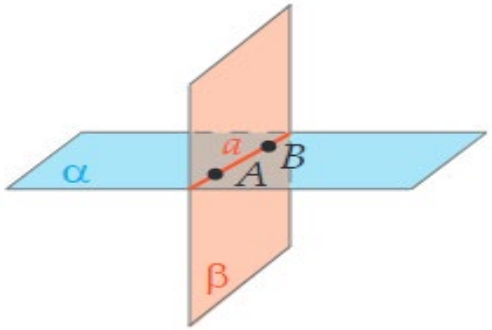
1. Divas plaknes sakrīt (atrodas viena uz otras)

Ja plaknēm α un β ir vismaz 3 kopīgi punkti, kuri neatrodas uz vienas taisnes, tad plaknes α un β sakrīt.

Kopīgo punktu skaits: bezgalīgi daudz.

2. Plaknes šķeļas pa taisni (plaknes šķēluma līniju)

$\alpha \cap \beta = a$

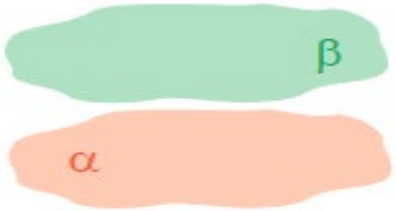


Kopīgo punktu skaits: bezgalīgi daudz.

3. Plaknes ir paralēlas

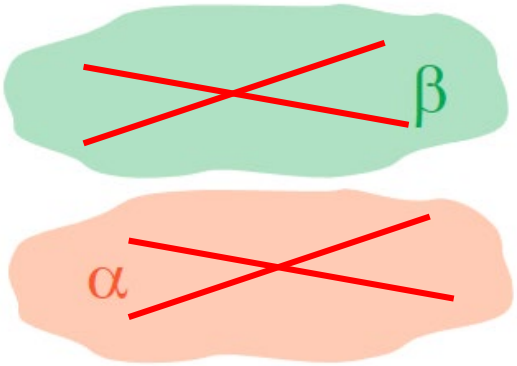
$\alpha \parallel \beta$

Kopīgo punktu skaits: 0 (nav).



Divu plakņu paralelitātes pazīme

Ja vienas plaknes divas krustiskas taisnes ir attiecīgi paralēlas ar otras plaknes divām krustiskām taisnēm, tad arī pašas plaknes ir paralēlas.



6. Uzdevumi patstāvīgajam darbam

Uzdevumi

6.15. Uzzīmē simboliskajam pierakstam atbilstošu zīmējumu.

a) $\alpha \parallel \beta;\quad m \cap \alpha = D;\quad m \cap \beta = E$

b) $m \parallel \alpha;\quad m \cap \beta = G$

c) $m \cap b = S;\quad m \in \alpha$

d) $s \cap t = \varnothing;\quad s \in \beta;\quad t \in \beta$

e) $s \cap t = \varnothing;\quad s \in \beta;\quad t \notin \beta$

f) $b \parallel \beta;\quad b \cap c = A;\quad c \cap \beta = B$

6.16. Izveido zīmējumu, kurā dotas divas taisnes, kas krustojas. Uzzīmē vēl divas taisnes, kas atrodas tajā pašā plaknē, kur atrodas abas krustiskās taisnes.

Uzdevumi

6.19. Trijstūra prizmā $ABCA_1B_1C_1$ (skat. 6.31. att.) nosauc:

a) taisni, kas krusto plakni BCC_1;

b) taisni, kas ir paralēla plaknei AA_1B_1;

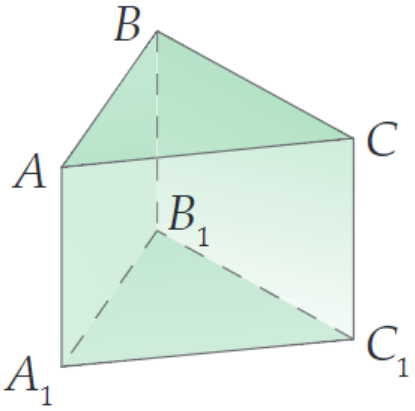
c) taisni, kas atrodas plaknē ABC;

d) plakni, kura ir paralēla taisnei CC_1;

e) plakni, kurai ar taisni BA_1 ir tieši viens kopīgs punkts;

f) plakni, kurā atrodas taisne AC.

Atbildes pamato.



6.31. att.

Uzdevumi

6.23. Rakstāmgalda stūri apzīmēti tā, kā parādīts 6.32. att. Nosaki taišņu savstarpējo novietojumu.

a) *AI* un *GK*

b) *IE* un *GH*

c) *FA* un *FH*

d) *GH* un *DE*

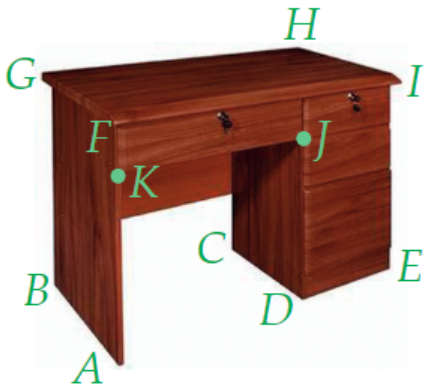
e) *CD* un *HI*

f) *JE* un *IE*

g) *JK* un *HG*

h) *CE* un *KA*

Atbildes pamato.



6.32. att.

Uzdevumi

6.24. Izmantojot 6.33. attēlu, nosaki taisnes un plaknes savstarpējo stāvokli.

a) *FJ* un *EJI*

b) *HC* un *AFJ*

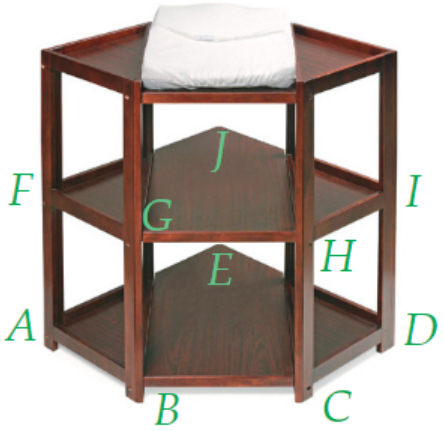
c) *AB* un *EDC*

d) *JG* un *FJI*

e) *AD* un *CHI*

f) *GB* un *JID*

Atbildes pamato.



6.33. att.

Uzdevumi

6.25. Izmantojot 6.33. attēlu, nosaki divu plakņu savstarpējo stāvokli.

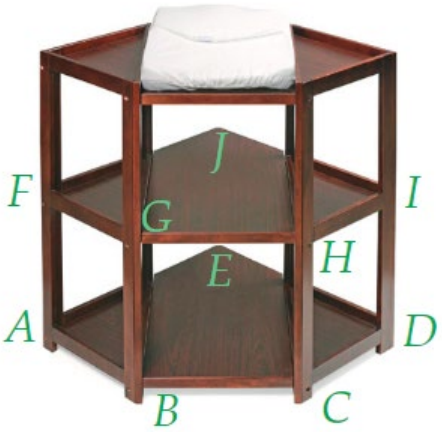
a) *AFG* un *HCB*

b) *FJI* un *EDC*

c) *JEB* un *ABC*

d) *JIH* un *GFJ*

e) *GID* un *FHC*



6.33. att.

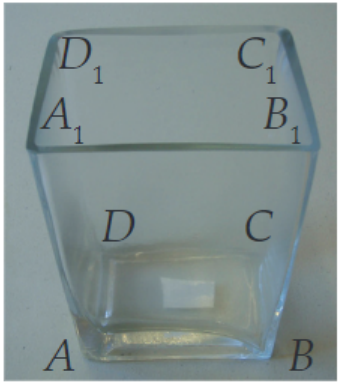
Uzdevumi

6.18. Dota vāze (skat. 6.30. att.). Atbildēs izmanto tikai attēlā atzīmētos nogriežņus (taisnes).

a) Nosauc divus pārus paralēlu taišņu, divus pārus krustisku taišņu, divus pārus šķērsu taišņu. Pamato atbildi.

b) Cik pavisam ir krustisku taišņu pāru? Pamato atbildi.

c) Cik pavisam ir šķērsu taišņu pāru? Pamato atbildi.

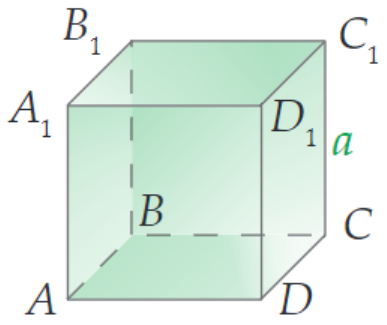


6.30. att.

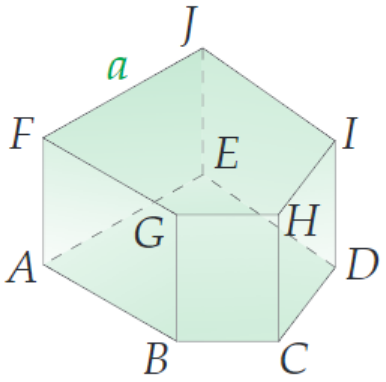
Uzdevumi

6.20. Katrā attēlā nosauc taisnei a paralēlu taisni, krustisku taisni un šķērsu taisni.

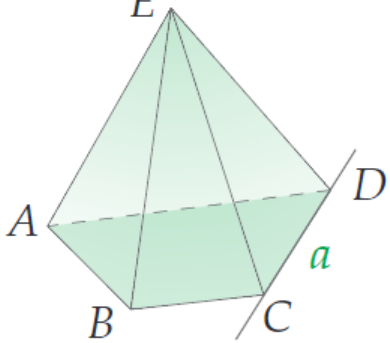
a)



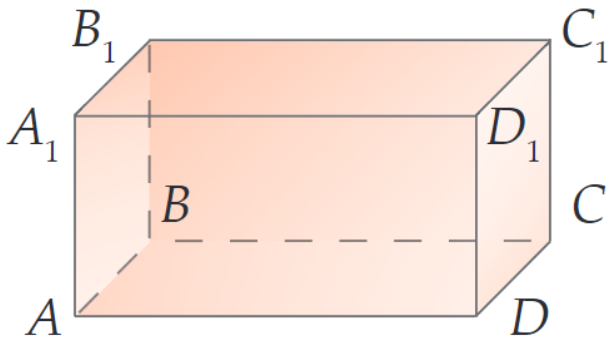
b)



c)



Uzdevumi



6.21. Taisnstūra paralēlskaldnī $ABCDA_1B_1C_1D_1$ nosauc:

a) paralēlas plaknes;

b) plakņu ABB_1 un BCC_1 šķēluma taisni;

c) plakņu $A_1B_1C_1$ un BCC_1 šķēluma taisni;

d) divus pārus plakņu, kuras šķeļas (cik šādu pāru var atrast?).

Atbildes pamato.

Uzdevumi

6.26. Zināms, ka $a \parallel c$ un $b \parallel d$. Taisnes a un b krustojas. Nosaki taišņu c un d savstarpējo novietojumu.

Atbildes

6.18. b) 24; c) 32.

6.19. Piem., a) AB; b) CC_1; c) AB; d) ABB_1; e) ABC vai $A_1B_1C_1$; f) ABC vai ACC_1.

6.24. a) Taisne krusto plakni; b) taisne ir paralēla plaknei; c) taisne atrodas plaknē; d) taisne atrodas plaknē; e) taisne krusto plakni; f) taisne ir paralēla plaknei.

6.25. a) Plaknes šķeļas; b) plaknes ir paralēlas; c) plaknes šķeļas; d) plaknes sakrīt; e) plaknes šķeļas.

Uzdevumi

6.7. Izlasīt pierakstu:

a) $k \cap m = E$;
b) $F \in \beta$;
c) $b \subset \alpha$;
d) $C \notin t$;
e) $u = \alpha \cap \beta$;
f) $d \cap \tau = G$;
g) $c \cap d = \varnothing$.

6.8. Pierakstīt saīsināti, lietojot simbolus:

a) taisne p ir plakņu α un β šķēluma taisne;
b) punkts M neatrodas plaknē φ;
c) plakne β novilkta caur taisni z;
d) taisnei b un plaknei α nav kopīgu punktu;
e) taisnes u un v krustojas punktā Q;
f) plakne α novilkta caur punktu T;
g) taisne h krusto plakni λ punktā D.

Uzdevumi

6.9. Noteikt, cik dažādu plakņu var novilkt

a) caur vienu punktu;
b) caur diviem punktiem;
c) caur trim punktiem;
d) caur četriem punktiem.

6.10. Cik daļās telpu sadala divas plaknes, ja

a) abas plaknes šķeļas;
b) plaknes nešķeļas?

6.11. Doti četri punkti, kas neatrodas vienā plaknē. Noskaidrot, vai trīs no šiem punktiem var atrasties uz vienas taisnes.

6.12. Dotas divas krustiskas taisnes a un b. Noteikt, vai taisne c, kas krusto taisnes a un b, atrodas ar tām vienā plaknē, ja

a) taisne c neiet caur a un b krustpunktu;
b) taisne c ir novilkta caur taišņu a un b krustpunktu.

6.13. Taisne paralēla vienai kuba šķautnei. Cik kuba šķautnēm tā ir paralēla?

6.14. Dotas trīs paralēlas taisnes. Cik plakņu var novilkt tā, lai tās saturētu vismaz divas no dotajām taisnēm?

Atbildes

6.9. a) bezgalīgi daudz b) bezgalīgi daudz
c) vienu vai bezgalīgi daudz
d) nevienu, vienu vai bezgalīgi daudz

6.10. a) 4 b) 3

6.11. nevar

6.12. a) atrodas b) var neatrasties

6.13. 4

6.14. 1 vai 3

7. Literatūras saraksts

LITERATŪRAS SARAKSTS

- Skola2030 mācību un metodiskie līdzekļi
- B. Āboltiņa, D. Kriķis, K. Šteiners. *Matemātika 11. klasei.* – Zvaigzne ABC, 2012.
- E. Slokenberga, I. France, I. France. *Matemātika 11. klasei*. - Lielvārds, 2010.

Elektroniskie resursi:

- uzdevumi.lv, virtuālā skola